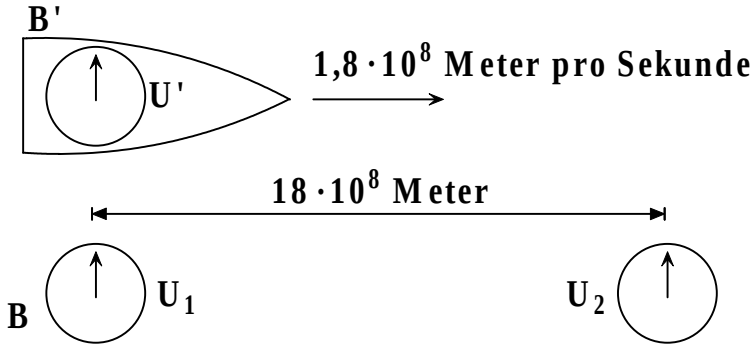
Zeitdilatation: Ein ausgearbeitetes Beispiel

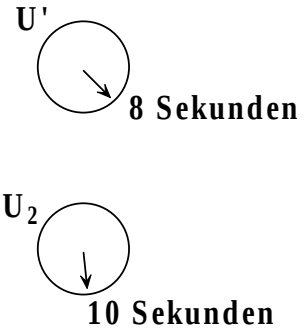
„Bewegte Uhren gehen langsam“ *plus* „Bewegte Uhren verlieren ihre Synchronisation“ *plus* „Längenkontraktion“ führt zu Konsistenz!

In diesem Text soll gezeigt werden, wie es möglich ist, dass zwei Beobachter, die sich in zwei verschiedenen gegeneinander mit relativistischer Geschwindigkeit bewegenden Bezugssystemen befinden, die Uhr des jeweils anderen langsamer gehen und nicht die gleiche Zeit anzeigen sehen, sich auf der anderen Seite jedoch darüber einig sind, welche Zeit eine Uhr anzeigt, die sich außerhalb der beiden bewegten Bezugssysteme befindet!

Nehmen Sie an, dass wir im Bezugssystem S zwei synchronisierte Uhren U_1 und U_2 haben, die $18 \cdot 10^8$ Meter Abstand voneinander haben (das sind 1,8 Millionen Kilometer oder 6 Lichtsekunden). Ein Raumschiff, das eine Uhr U' mit sich führt, fliegt mit 60% der Lichtgeschwindigkeit, das sind 180000 km pro Sekunde, parallel zur Geraden U_1U_2, wobei es die beiden Uhren in kleinem Abstand passiert.



Nehmen Sie weiter an, die Uhr U' wird mit der Uhr U_1 in dem Moment synchronisiert, in dem sie aneinander vorbeifliegen, so dass sie beide auf Null stehen.
Ein äußerer Beobachter B im Bezugssystem S — das uns hier einmal als „äußerer“ Bezugsrahmen dienen soll — misst, dass das Raumschiff 10 Sekunden benötigt, um die Uhr U_2 zu erreichen, da die Distanz 6 Lichtsekunden beträgt und das Raumschiff eine Geschwindigkeit von $0,6 \cdot c$ hat.
Was zeigt die Uhr an Bord des Schiffes, wenn es die Uhr U_2 erreicht? — Der Faktor, der die Zeitdilatation angibt, beträgt $\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{4}{5}$, also wird U', die Schiffsuhr, 8 Sekunden anzeigen.



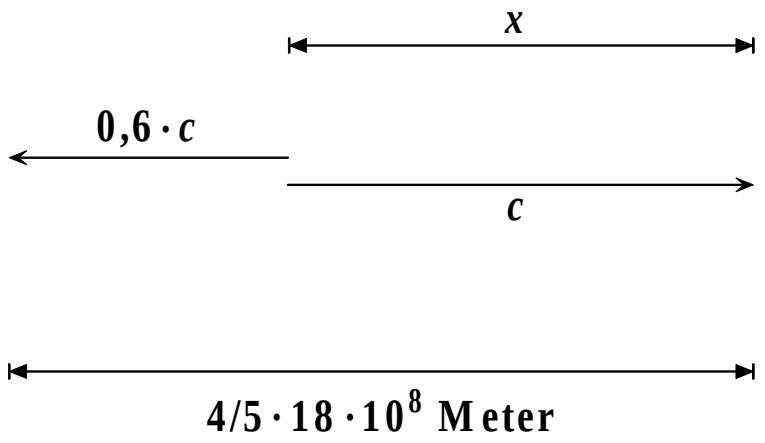
Daher werden sowohl B als auch B', wenn sie sich bei U_2 befinden, wenn die Schiffsuhr U' an U_2 vorbeifliegt, darin übereinstimmen, dass die beiden Uhren wie nebenstehend aussehen.
Wie um alles in der Welt kann dann B' feststellen, dass die Uhren U_1 und U_2 diejenigen sind, die nachgehen?

Für B' gehen die Uhren U_1 und U_2 nach, aber erinnern Sie sich, dass sie *nicht synchronisiert sind*. Für B' liegt die Uhr U_1 gegenüber U_2 um $\frac{Lv}{c^2} = \frac{L}{c} \cdot \frac{v}{c} = 6 \cdot 0.6 = 3.6$ Sekunden zurück.
Daher wird B' den Schluss ziehen, dass in dem Moment, wo U_2 an U_1 vorbeifliegt U_1 6,4 Sekunden anzeigen muss, weil U_2 10 Sekunden anzeigt. Die Uhr, die zum Beobachter B' gehört, wird in dem Moment 8 Sekunden anzeigen, *daher wird* B' *folgern, dass* U_1 *um den korrekten Zeitdilatationsfaktor von* $\frac{4}{5}$ *nachgeht*. So gelingt es, dass der Wechsel in der Gleichzeitigkeit es den beiden Beobachtern ermöglicht, die Uhr des jeweils anderen nachgehen zu sehen.
Natürlich ist es nicht ganz einfach zu überprüfen, ob B' mit seiner Annahme Recht hat, dass in

dem Moment, wo er die zweite „Außenuhr“ U_2 passiert, die Uhr U_1 6,4 Sekunden anzeigt. Schließlich ist die erste Uhr nun 1,8 Millionen Kilometer entfernt!
Lassen Sie uns dennoch annehmen, dass beide Beobachter mit Hubble-ähnlichen Teleskopen ausgestattet sind, die beide an schnell agierende Kameras angeschlossen sind, so dass es keine Kunst ist, eine 1,8 Millionen Kilometer entfernte Uhr abzulesen.
Um ihren Streit zu beenden, verständigen sich die beiden darauf, dass wenn B′ die zweite Uhr erreicht, der außenstehende Beobachter ebenfalls dort stationiert sein wird und dass beide in dem Moment, wo B′ vorbeifliegt, einen digitalen Schnappschuss von der weit entfernten Uhr U_1 machen werden, um zu sehen, was sie anzeigt.
B weiß natürlich, dass U_1 6 Lichtsekunden entfernt liegt, und dass U_1 mit U_2 synchronisiert ist, die in dem Moment des Vorbeiflugs 10 Sekunden anzeigt, also muss sein Schnappschuss von U_1 4 Sekunden anzeigen. Das heißt, wenn er die 6 Lichtsekunden entfernte Uhr betrachtet, sieht es für ihn so aus, als wäre es 6 Sekunden früher.
Was zeigt das Digitalfoto, das B′ angefertigt hat? — Es muss ein identisches Bild zeigen, denn zwei Fotos, die zur selben Zeit vom selben Ort gemacht wurden, *müssen* dasselbe zeigen! Also muss B′ ebenfalls ein Foto erhalten, auf dem die Uhr U_1 4 Sekunden anzeigt.
Wie kann B′ diese Tatsache mit seiner Annahme in Einklang bringen, dass die Uhr U_1 in dem Moment, in dem die Kamera ausgelöst wurde, eine Zeit von 6,4 Sekunden anzeigt?
Die Antwort ist, dass es eine Möglichkeit gibt, wenn B′ etwas Ahnung von Relativitätstheorie hat!

1. **Längenkontraktion**
   Für B′ ist die Uhr U_1 tatsächlich nur $\frac{4}{5} \cdot 18 \cdot 10^8$ Meter entfernt (B′ sieht die Strecke $\overline{U_1U_2}$ lorentz–kontrahiert!).

2. **Das Licht musste noch nicht einmal diese Strecke zurücklegen!**
   In dem Bezugssystem von B′ bewegt sich die Uhr U_1 vom Beobachter weg, daher muss das Licht, das B′ im Punkt U_2 erreicht, U_1 verlassen haben als die Uhr noch näher war — in der Entfernung x in der unten folgenden Skizze. Diese zeigt das Licht im Bezugssystem von B′, wie es sich mit Lichtgeschwindigkeit c auf sie zu bewegt, während sich die Uhr U_1 gleichzeitig mit $0,6 \cdot c$ von ihr fort (in der Skizze nach links) bewegt. Daher ist das Bild, das sie von U_1 sieht, während sie an U_2 vorbeifliegt, in dem Moment erzeugt worden, als B′ in seinem Bezugssystem eine Entfernung von x von U_1 hatte, wobei $x \cdot (1 + \frac{3}{5}) = \frac{4}{5} \cdot 18 \cdot 10^8$ m gilt, woraus $x = 9 \cdot 10^8$ m folgt.
   Nachdem sich B′ klar gemacht hat, dass das Bild, das er von U_1 geschossen hat, die Uhr verlassen hat, als sie nur $9 \cdot 10^8$ Meter entfernt war, das heißt also 3 Lichtsekunden, folgert er, dass er U_1 beobachtet, als wäre es 3 Sekunden früher.



3. **Zeitdilatation**
   Die Geschichte hört sich bisher so an:
   B′ hat ein Digitalfoto der ersten Uhr, das 4 Sekunden anzeigt. B′ weiß, dass das Licht 3 Sekunden benötigt hat, um ihn zu erreichen. Was folgert er daraus, das die Uhr in Wirklichkeit in dem Moment angezeigt hat, als er die zweite Uhr passierte? Wenn Sie nun in Versuchung sind, 7 Sekunden als Antwort zu geben, haben Sie vergessen, dass sich im Bezugssystem von B′ die Uhr U_1 mit einer Geschwindigkeit von $0,6 \cdot c$ bewegt und daher um einen Faktor von $\frac{4}{5}$ langsamer geht.
   Wenn B′ diesen Faktor korrekt in die gesamte Interpretation des Vorganges integriert, folgert er, dass die Uhr in den drei Sekunden, die das Licht benötigte, um ihn zu erreichen, selber um $\frac{4}{5}$ mal 3 Sekunden, also 2,4 Sekunden weitergelaufen ist.
   Insgesamt ergibt sich also, dass die Uhr auf dem Foto 4 Sekunden anzeigt, der Beobachter weiß, dass die Uhr 2,4 Sekunden weitergelaufen sein muss, so dass die Uhr im Moment der Anfertigung der Aufnahme 6,4 Sekunden angezeigt haben muss, was genau mit der obigen Annahme des Beobachters B′ übereinstimmt!

Der Hauptpunkt dieser Ausführungen ist, dass es zunächst unmöglich erscheint, dass zwei relativ zueinander bewegte Beobachter beide meinen können, die Uhr des anderen gehe nach. Bezieht man aber alle anderen Konsequenzen der Relativitätstheorie mit in die Überlegungen ein, nämlich die Längenkontraktion sowie die Relativität der Gleichzeitigkeit, die alle letztendlich aus der Annahme der konstanten Lichtgeschwindigkeit folgen, ergibt sich ein vollkommen konsistentes Bild. Es gibt also keine logischen Widersprüche, es sei denn, man lässt irgendeinen Aspekt der Relativitätstheorie außer Acht!

Michael Fowler, University of Virginia; Übers. Christoph Scholz

Quelle (und weitere Texte im Original): *http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/*