Die Lorentz–Transformation und ihre Konsequenzen

Herleitung der Transformationsgleichung für *x*

Ausgehend von den beiden Formeln für die Galilei–Transformation,

$$x = x' + vt' \qquad \text{bzw.} \qquad x' = x - vt,$$

macht man den folgenden Ansatz für die Transformationsgleichungen, die bei sehr hohen („relativistischen“) Geschwindigkeiten gültig sein sollen:

$$x = k \cdot (x' + vt') \qquad \text{bzw.} \qquad x' = k \cdot (x - vt)$$

Der Ansatz rechtfertigt sich insofern, als dass einerseits das k ein mathematischer Ausdruck sein muss, der sich für kleine Geschwindigkeiten immer mehr der 1 annähert, damit die neu zu findende Transformation in die obigen Gleichungen der Galilei–Transformation übergeht, andererseits muss der „Korrekturfaktor“ k in beiden Gleichungen derselbe sein, weil es sonst nicht egal wäre, welches der beiden Systeme man mit gestrichenen Koordinaten und welches man mit ungestrichenen Koordinaten versieht.

Um herauszufinden, welches k die beiden Postulate von Einstein erfüllt, nimmt man zunächst an, dass die beiden Koordinatensysteme K und K′ zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ mit ihren beiden Koordinatenursprüngen O bzw. O′ zusammenfallen. Sendet man nun zu diesem Zeitpunkt ein Lichtsignal in Richtung der x– bzw. x′–Achse aus, so müssen für den Ort des Lichtsignals in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit t bzw. t' die beiden folgenden Gleichungen gelten:

$$x = ct \qquad \text{bzw.} \qquad x' = ct'$$

Diese beiden Gleichungen entsprechen dem zweiten einsteinschen Postulat, nämlich dass die Geschwindigkeit des Lichtstrahls in beiden Koordinatensystemen gemessen den Wert c ergeben muss.
Setzt man diese beiden Gleichungen in den obigen Ansatz ein, so erhält man das Gleichungssystem:

$$(1)\; ct = k \cdot (x' + vt') = k \cdot (ct' + vt') = kt' \cdot (c + v)$$

$$(2)\; ct' = k \cdot (x - vt) = k \cdot (ct - vt) = kt \cdot (c - v)$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen miteinander, und dividiert anschließend durch den gemeinsamen Faktor tt', so ergibt sich

$$c^2tt' = k^2tt'(c^2 - v^2) \iff k^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Insgesamt erhalten wir also für den gesuchten Korrekturfaktor

$$k = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Um die folgenden Rechnungen übersichtlicher zu gestalten, werden wir diesen Wurzelausdruck in Zukunft immer mit k abkürzen.

Herleitung der Transformationsgleichung für *t*

Ersetzt man in der soeben erhaltenen Transformationsgleichung für x', $x' = k \cdot (x - vt)$, die Variable x durch den ihr zugeordneten transformierten Term $k \cdot (x' + vt')$ (vgl. o.), so erhält man die Gleichung

$$x' = k\left[k\left(x' + vt'\right) - vt\right].$$

Weitere Umformungen ergeben

$$\begin{aligned}
x' &= k^2x' + k^2vt' - kvt \\
kvt &= (k^2-1)\cdot x' + k^2vt' \\
t &= \frac{k^2-1}{k}\cdot\frac{x'}{v} + kt' \\
&= k\cdot\left(\frac{k^2-1}{k^2}\cdot\frac{x'}{v} + t'\right) \\
&= k\cdot\left[\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\frac{x'}{v} + t'\right], \qquad \text{mit } \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \\
&= k\cdot\left[\left(1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{x'}{v} + t'\right] \\
t &= k\cdot\left(t' + \frac{v}{c^2}\cdot x'\right)
\end{aligned}$$

Die Transformationsgleichung für t' erhält man entsprechend zu

$$t' = k\cdot\left(t - \frac{v}{c^2}\cdot x\right).$$

Folgerung der Zeitdilatation aus der Lorentz–Transformation

Wir werden nun aus den obigen Transformationsgleichungen den folgenden Schluss ziehen:
Das Zeitintervall für zwei Ereignisse, die man am selben Ort betrachtet, ist immer kleiner als das Zeitintervall für dieselben Ereignisse, die in einem anderen, zu dem ersteren relativ bewegten Inertialsystem, an zwei verschiedenen Orten stattfinden.

Stellen wir uns zunächst zwei Ereignisse vor, die in einem System K′ zu zwei verschiedenen Zeitpunkten ${t_1}'$ und ${t_2}'$, aber an einem festen Ort mit derselben Koordinate ${x_0}'$ stattfinden. In einem solchen Fall bezeichnet man die zwischen den beiden Ereignissen liegende Zeitdifferenz als *Eigenzeit* $t_E = {t_2}' - {t_1}'$.
Betrachtet man nun dieselben Ereignisse aus einem System K, das sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu dem System K′ bewegt, so gelangt man dort zu dem Schluss, dass diese beiden Ereignisse zu den beiden (im System K gemessenen) Zeitpunkten

$$t_1 = k\cdot({t_1}' + \frac{v}{c^2}\cdot {x_0}') \qquad \text{bzw.} \qquad t_2 = k\cdot({t_2}' + \frac{v}{c^2}\cdot {x_0}')$$

stattgefunden haben. Die im System K gemessene Zeitdifferenz zwischen den beiden Ereignissen beträgt also

$$\Delta t = t_2 - t_1 = k \cdot (t_2{}' + \frac{v}{c^2} \cdot x_0{}') - k \cdot (t_1{}' + \frac{v}{c^2} \cdot x_0{}') = k \cdot (t_2{}' - t_1{}') = k \cdot \Delta t_E$$

Das bedeutet, dass das im bewegten System gemessene Zeitintervall gegenüber dem Eigenzeitintervall gedehnt erscheint.

Folgerung der Längenkontraktion aus der Lorentz–Transformation

Aus den Gleichungen der Lorentz–Transformation lässt sich außerdem der folgende Schluss ziehen:
In jedem Inertialsystem, in dem sich ein Objekt bewegt, ist dessen in Bewegungsrichtung gemessene Länge kürzer als die Ruhelänge, d. h. die gemessene Länge in einem Koordinatensystem, in dem das Objekt ruht bzw. das sich mit dem Objekt mitbewegt.

Wir betrachten als Beispiel einen im System K′ ruhenden Stab, dessen beide Enden die x–Koordinaten $x_1{}'$ und $x_2{}'$ haben. Dann ist die Ruhelänge (Eigenlänge) des Stabes wie zu erwarten definiert als

$$l_E = x_2{}' - x_1{}'.$$

Die im (relativ zu K′ bewegten) System K gemessene Länge des Stabes ist definiert als die Differenz $l = x_2 - x_1$ der x–Koordinaten der beiden Orte, an denen sich die beiden Enden des Stabes zur selben *in K gemessenen Zeit* befinden[1]. Also muss man $t_1 = t_2$ setzen und kann daher nur die beiden folgenden Transformationsgleichungen anwenden:

$$x_1{}' = k \cdot (x_1 - vt_1) \qquad \text{bzw.} \qquad x_2{}' = k \cdot (x_2 - vt_2)$$

Wegen $t_1 = t_2 = t$ (siehe oben) erhält man

$$x_2{}' - x_1{}' = k \cdot (x_2 - vt) - k \cdot (x_1 - vt) = k \cdot (x_2 - x_1)$$

Daraus folgt

$$l = x_2 - x_1 = \frac{1}{k} \cdot (x_2{}' - x_1{}')$$

Also ist

$$l = \frac{1}{k} \cdot l_E = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot l_E,$$

d. h. die Länge des Stabes erscheint in dem System, in dem sich der Stab mit der Geschwindigkeit v bewegt, kürzer als die Ruhelänge (Eigenlänge) l_E.

[1] An dieser Stelle sei nochmal daran erinnert, dass der Begriff der Gleichzeitigkeit zweier Zeitpunkte vom gewählten Bezugssystem abhängt!